

BEVRIENDE GETALLEN

Twee getallen zijn bevriend als de som van de delers van het eerste getal gelijk is aan het tweede getal en de som van de delers van het tweede getal gelijk is aan het eerste getal.

Voorbeeld:

De getallen 220 en 284.

220	14^2	284	16^2
1	220	1	284
2	110	2	142
4	55	4	71
5	44		
10	22		
11	20		
		220	

We bepalen eerst tot welke deler we moeten zoeken. Voor 220 is dat **14** (want $14 \times 14 = 196$) (het vierkantsgetal dat het dichtst tot het getal 220 nadert). Voor 284 is dat **16** (want $16 \times 16 = 256$, het vierkantsgetal dat het dichtst het getal 284 benadert).

De delers van 220 hebben als som 284. De delers van 284 hebben als som 220.

Waarom moeten de leerlingen naar gebrekkige, volmaakte, overvloedige en bevriende getallen zoeken?

1. Het zoeken naar volmaakte getallen is een link met de historische wiskunde. Van in de oudheid hebben wiskundigen (filosofen) zich bezig gehouden met het ontrafelen van getallen. Het zoeken naar volmaakte getallen was daarvan een onderdeel. Enkele beroemde wiskundigen die zich hiermee uiteengezet hebben zijn: Pythagoras, Euclides, Nicomachus, Euler e.a.
2. Gebrekkige, volmaakte en overvloedige getallen zijn een onderdeel van de weg die gegaan wordt om tot de priemgetallen te komen. Die priemgetallen zijn dan weer belangrijk bij het vereenvoudigen van breuken en het ontbinden in priemfactoren om zo te komen tot het Kleinste Gemeen Veelvoud (KGV) en de Grootste Gemene Deler (GGD).
3. Het is een toepassing op de vierkantsgetallen. Het zoeken van delers van een getal stopt als je bij de deler bent aangekomen van het vierkantsgetal dat het dichtst bij het getal komt en kleiner is dan het getal.
4. Het is een toepassing op de regels van deelbaarheid. De leerlingen moeten in een oogopslag kunnen zien of een getal deelbaar is door een kleiner getal. Dit geldt zeker voor de delers van 1 tot 12.
5. Het is een extra oefening op de tafels van vermenigvuldiging en deling.
6. Het hoofdrekendend optellen wordt extra geoefend. Voor grote getallen wordt ook het cijferend optellen geoefend.
7. De leerlingen leren schatten. Welk vierkantsgetal komt er dichtst bij? Of welk getal vermenigvuldigd met zichzelf komt het dichtstbij het te ontleden getal?
8. De leerlingen leren een rekentoestel gebruiken en daarbij de geheugentoetsen hanteren. Dit in het kader van de lessen ict.
9. Bevriende getallen zijn een boeiende toepassing op het zoeken van de delers van getallen. Reeds in de klassieke oudheid heeft Pythagoras het kleinste bevriende getallenkoppel (220 en 284) ontdekt en gezocht naar andere koppels. Pas vele eeuwen later hebben beroemde wiskundigen andere bevriende getallen gevonden.

MEER INFO (uit Wikipedia):

Van twee [natuurlijke getallen](#) A en B wordt gezegd dat ze **bevriend** zijn als de som van de [delers](#) van het getal A (behalve A zelf, maar inclusief 1) gelijk is aan het andere getal B, terwijl de delers van B samen het getal A opleveren.

Een sinds de oudheid bekend paar bevriende getallen is (220, 284):

$$(\text{som delers } 220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$(\text{som delers } 284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Erstmals erwähnte Pythagoras ca. 500 v. Chr. die befreundeten Zahlen 220 und 284. Auf die Frage, was ein Freund sei, antwortete er: "*Einer, der ein anderes Ich ist, wie 220 und 284.*"

Pas vanaf de 14e eeuw werden de volgende bevriende getallen gevonden.

1184 en 1210: 1866 zeigte der Italiener B. Niccolò I. Paganini (nicht der *Violinvirtuose*) als 16-Jähriger, dass 1184 und 1210 befreundete Zahlen sind. Diese hatte man bis dahin übersehen. Es ist das zweitkleinste befreundete Zahlenpaar.

2620 en 2924

5020 en 5564

6232 en 6368

10744 en 10856: gevonden door *Ibn al-Banna* (1265 - 1321)

12285 en 14595

17296 en 18416

63020 en 76084

1747 fand Euler 30 weitere befreundete Zahlenpaare und veröffentlichte diese in seinem Werk *De numeris amicabilibus*. 3 Jahre später veröffentlichte er weitere 34 Zahlenpaare, davon waren allerdings 2 Paare falsch.

Aanvullende informatie over PYTHAGORAS

Pythagoras (Grieks: Πυθαγόρας) (Samos, ca. 572 v.Chr. – Metapontum, ca. 500 v.Chr.)^[1] was een Grieks wiskundige, wijsgeer, filosoof en hervormer. Hij werd door sommigen als een van de [Zeven Wijzen](#) beschouwd.

Pythagoras werd geboren op [Samos](#), een van de toen welvarende [Griekse](#) eilanden in de [Egeïsche Zee](#). Hij kreeg er van jongs af aan een goede opvoeding en opleiding. Volgens de overlevering heeft hij veel reizen gemaakt naar [Egypte](#) en [Mesopotamië](#), waar hij gestudeerd zou hebben onder plaatselijke priesters. Hij streefde harmonie en reinheid van de ziel na, wat volgens hem bevorderd kon worden door onder andere de kennis van getalsverhoudingen. Deze verhoudingen beheersen volgens zijn leer het heelal, zoals ze bijvoorbeeld ook terug te vinden zijn in de [muziek](#). Pythagoras ontdekte ook de muzikale [boventonenreeks](#) met de verhoudingen

van diverse [intervallen](#), door een gespannen snaar op verschillende punten af te klemmen. Hij was een zeer geoefend [lierspeler](#).

Omstreeks [530 v.Chr.](#) stichtte Pythagoras in [Croton](#) een school, die ook in andere [Zuid-Italiaanse](#) steden afdelingen vestigde. Bij zijn volgelingen gold een volledige gelijkheid tussen mannen en vrouwen, een houding die in de Griekse wereld uitzonderlijk was. Pythagoras en zijn aanhangers hebben een belangrijke invloed uitgeoefend op het openbare en het politieke leven, maar zijn daarbij ook op krachtig verzet gestuit; tegen het eind van zijn leven moest Pythagoras Croton verlaten en enkele decennia later vond een algehele opstand tegen zijn aanhangers plaats.

[Aristoteles](#) vatte de leer van Pythagoras en zijn opvolgers aldus samen:

- de dingen zijn getallen
- de gehele hemel is harmonie en getal

Pythagoras was overtuigd van de onsterfelijkheid van de [ziel](#) en onderwees de [reïncarnatie](#). Dat is ook de reden waarom hij geen vlees at; lange tijd werden [vegetariërs](#) ook wel pythagoreeërs genoemd.

Pythagoras' religieuze voorstellingen waren waarschijnlijk van [Oosterse](#), [Indische](#) oorsprong. Hij geloofde in zielsverhuizing.

"Volgens deze [voorstellingen] maakt de onsterfelijke ziel van de mens een lang louteringsproces door in steeds hernieuwde belichamingen, waarbij zij ook de dierlijke gestalte aan kan nemen. In verband daarmee staat, evenals in India, het gebod geen dier te doden of te offeren, en zich van dierlijk voedsel te onthouden. Daar als doel van het leven wordt aangezien de ziel door reinheid en vroomheid uit de kringloop der wedergeboorten te verlossen, vertoont de Pythagoreïsche ethiek met India verwante trekken: zelftucht, ingetogenheid, onthouding staan in het middelpunt."^[2]

Pythagoras combineerde voor het eerst wiskunde met [theologie](#). Deze combinatie zullen we later tegenkomen bij [Plato](#), maar ook bij de middeleeuwse theologen, bij [Baruch Spinoza](#) en bij [Leibniz](#) en later tot zelfs bij [Kant](#). Pythagoras heeft steeds een grote invloed op het denken uitgeoefend.

Befaamd is de [getallenleer](#) van de oude pythagoreeërs: zij namen aan dat de dingen [getallen](#) zijn of erop lijken, of ook wel dat de elementen van de dingen ook die van het getal zijn.

Het idee dat "mooie" getalsverhoudingen iets harmonisch opleveren kon Pythagoras aantonen met een aangestroken snaar. Wanneer je een snaar aanstrikt en daarna de snaar halveert hoor je twee tonen die heel goed samen klinken. Wij zeggen nu dat deze tonen een [octaaf](#) verschillen. De lengteverhouding 2:3 geeft een [kwint](#), 3:4 geeft een [kwart](#). Ook dan zijn de tonen '[consonant](#)'.

Op basis van gehele verhoudingen is de reine [stemming](#) voor een [toonladder](#) gedefinieerd: de [pythagoreaanse stemming](#).

De toonladder van Pythagoras ziet er als volgt uit:

de tonen	E	D	C	B	A	G	F	E
de constructie	2/3	3/4	27/32	8/9	1	9/8	81/64	4/3
snaarlengtes	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
toonafstanden		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

Voor de pythagoreeërs corresponderen getallen niet alleen met muzikale fenomenen, maar ook met begrippen en dergelijke: 4 is gerechtigheid (2×2 , gelijk maal gelijk), 5 is huwelijk (eerste verbinding van even (dat wil zeggen vrouwelijk) met oneven (dat wil zeggen mannelijk)). Het volmaakte getal is 10 ($1 + 2 + 3 + 4$), *tetractys* genoemd: deze is bron en oorsprong van alle dingen en bevat bijvoorbeeld alle getallen nodig om de voornaamste toonverhoudingen te definiëren. De elementen van het getal zijn het 'bepaalde' en het 'onbepaalde', termen die ook met andere gepaarde tegendelen (oneven-even, mannelijk-vrouwelijk, goed-kwaad) op één lijn gesteld werden.

De oorspronkelijke getallenleer van Pythagoras en de zijnen was derhalve geen wetenschappelijke [wiskunde](#), maar eerder een toepassing, een soort [metafysica](#) van het getal; op den duur is echter ook in de school van Pythagoras, net als op andere plaatsen in de Griekse wereld, wiskunde op wetenschappelijke wijze beoefend.

Pythagoras stelde zich de getallen voor in bepaalde gedaanten. "Hij sprak van vierkante en kubusvormige getallen, van langwerpige, driehoekige en piramidevormige getallen, enzovoort. Uit de getallenvormen werden dan de bewuste figuren opgebouwd. Blijkbaar vatte hij de wereld op als bestaande uit atomen, terwijl de lichamen dan waren samengesteld uit moleculen, die weer waren opgebouwd uit in verschillende vormen gerangschikte atomen. Op deze wijze trachtte hij de wiskunde te maken tot de grondslag voor zowel de natuurkunde als voor de [aesthetica](#)." (Russell, 1948)

Over de [ethiek](#) zou je hetzelfde kunnen zeggen. Pythagoras hechtte weinig waarde aan empirisch onderzoek. Wanneer er tussen de verschijnselen eenmaal wiskundige relaties waren ontdekt, trok het denken zich terug in de sfeer van het ideële. Het denken is superieur aan de zintuiglijke waarneming. Het zuivere weten is gericht op het onstoffelijke, en bevrijdt de ziel uit de banden van de zinnelijkheid.

De voornaamste bijdrage van de pythagoreeërs ligt op het gebied van de getallenleer, terwijl zij de [meetkunde](#) in het algemeen op 'aritmatische' wijze beoefenden en daardoor onder meer geen raad wisten met het probleem van de irrationele wortels (zie hieronder bij 'Irrationale getallen').

Het is typerend voor Pythagoras dat hij deze waarneming heel snel extrapoleerde naar het [heelal](#). De hemellichamen -ook de aarde- bewegen zich in cirkelvormige banen om een centraal vuur. Dat vuur zien wij niet, want aan de kant van de -kennelijk bolvormige- aarde waar je dat vuur wel zou kunnen zien is geen leven mogelijk. De stralen van deze banen verhouden zich als de tonen in het octaaf. Door hun beweging in deze banen brengen de hemellichamen muziek voort, een "hemelse symfonie" of "[harmonie der sferen](#)."

Het heelal is dus een geordend geheel, een "kosmos". Dit idee van het heelal als kosmos zou een belangrijke bron van inspiratie worden.

Omdat tien het volmaakte getal was, moest het heelal dus wel uit tien hemellichamen bestaan. Met de vijf toen bekende planeten (Mercurius, Venus, Mars, Jupiter, Saturnus), de zon, de maan, de aarde en het centrale vuur kwam men slechts aan het getal negen. Dan moest er, recht tegenover de aarde, een "tegenaarde" of "antichthon" rond het centrale vuur cirkelen. Aarde en tegenaarde cirkelden in de kleinste baan; daarna kwam de maan, vervolgens de zon, en nog verder de planeten.

Archimedes vertelt dat er een volgeling van [Plato](#) was, [Aristarchos](#), die aannam dat de aarde niet om een centraal vuur, maar om de zon cirkelde. Het geschrift waarin Aristarchos dit beschreef is helaas verloren gegaan.

De stelling van Pythagoras is waarschijnlijk de bekendste stelling in de [wiskunde](#). 'Zijn' stelling was overigens alleen maar nieuw voor de Grieken. In Babylonië was het resultaat al veel langer bekend. De stelling zegt iets over de relatie tussen de rechthoekszijden en de schuine zijde ([hypotenusa](#)) van alle rechthoekige driehoeken.

In de rechthoekige driehoek ABC zijn de zijden a en b de rechthoekszijden. De zijde c noemen we de schuine zijde of [hypotenusa](#).

De stelling van Pythagoras luidt:

"In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van de hypotenusa (schuine zijde) gelijk aan de som van de kwadraten van de lengtes van de rechthoekszijden."

Anders geformuleerd:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Nog belangrijker dan deze stelling was echter het uitgangspunt van de pythagoreeërs dat alles bestaat uit [verhoudingen](#) van (gehele) getallen. Geleidelijk drong tot hen door dat er met "hun" driehoek iets niet klopte. Wanneer de korte zijden ervan even lang zijn lukt het met geen

mogelijkheid de verhouding tussen de lengte van een korte en van de lange zijde in getallen uit te drukken. Na jaren vonden zij het [bewijs](#) waarom dit onmogelijk is: het bestaan van irrationale getallen, een triomf voor het verstand, een debacle voor een doctrine. Met alle macht probeerden zij deze inbreuk geheim te houden. Volgens de overlevering is Pythagoras' leerling [Hippasus](#), die dit toch bekendmaakte, om het leven gebracht.

Een ander gevolg was dat de Grieken aan de [meetkunde](#) de voorkeur gaven boven de rekenkunde. Pas in de zeventiende eeuw, met de komst van [René Descartes](#), zouden getallen weer de overhand krijgen...

Een andere belangrijke wiskundige stelling waarvan de ontdekking aan Pythagoras wordt toegeschreven is de stelling dat in een [driehoek](#) de som van de drie hoeken altijd gelijk is aan 180°