

# TWAALFTALLIG VERSUS TIENTALLIG.

Waarom gaan al die rekenoefeningen tot 12? Dat is de vraag die me gesteld werd, naar aanleiding van mijn uiteenzetting van vorige week. En naar aanleiding van het didactisch schoolfeest vorige zaterdag. Het is een vraag die niet alleen nu gerezen is, maar die ik in de loop der jaren al dikwijls heb mogen beantwoorden. Of getracht heb er een antwoord op te geven. Daarom nu er toch ook maar even op ingaan.

De 12 hoort overduidelijk tot het twaalftallig stelsel, dat in vóór-Napoleontische tijden ook in onze streken het gebruikelijke rekenkundige stelsel was. Ondertussen zijn we al enkele generaties tientallig gaan rekenen, en zijn er heel wat mensen die het bestaan van een ander systeem al lang niet meer kennen. Tenzij ze nog enige noties hebben van wat in Engeland nog steeds niet verdwenen is. Zo gaat het ook in het traditionele onderwijs: er wordt met geen woord gerept over het bestaan van een ander stelsel dan het tientallige. Ja toch wel, want in de laatste decennia is het tweetallig stelsel belangrijk geworden. Met bits en bytes. En daar speelt het onderwijs maar al te gretig op in. Al blijkt dat heel wat hardware daar maar staat te verkommeren, wegens gebrek aan creatieve vermogens. Van de machine en de leerkrachten.

Het twaalftallig stelsel is steeds een groot succes geweest voor niet-schrijvende rekenaars. Het tientallig stelsel heeft zich opgedrongen aan de schrijvende rekenaars. Dat is ook het voordeel van het tientallig stelsel: het is visueel heel sterk. De plaats van de cijfers bepaalt de waarde ervan. Op de eerste rij: de eenheden. Links daarvan de tientallen. Dan weer links de honderdtallen. En zo verder. Heb je er al eens over nagedacht waarom we de cijfers van rechts naar links naar waarde schatten. We schrijven ze wel van links naar rechts. We lezen ze ook van links naar rechts. Zij het niet altijd, en ook niet zo consequent.

Vijftien: de vijf van de eenheden komt vóór de tien. Terwijl in het schrijfbeeld de 1 van het tiental vooropstaat en ook eerst geschreven wordt. Dit brengt nogal eens problemen teweeg bij niet geschoolde cijfereers. En het moet in de loop van de eerste klas ook goed geoefend worden. Je zegt of dicteert vijftien, en de kinderen moeten dan het laatst gehoorde woord (tien) eerst opschrijven.

Nog erger wordt het als de getallen groter worden. Dat merk je vooral heel goed in de derde klas. Daar komen de kinderen in contact met de grote getallen. En ze werken er ook heel graag mee. Maar hoe lees je een getal als dit:

123.456.789

Van links naar rechts? Nee.

Eerst van links naar rechts, dan weer van rechts naar links, dan het rechtse cijfer overslaan en op de plaats waar de punt staat even adem halen en vermelden waar we zijn: bij de miljoenen of de duizenden. Lees even mee:

honderd drie - en -twintig: we beginnen links bij de 1, dan komt de 3 van de eenheden en gaan we naar links voor de tientallen.

miljoen (dat zien we aan het punt en aan de cijfers die erachter komen): het oog heeft dus even tot helemaal rechts moeten gaan om te zien welke waarde het cijfer 3 had.

Dan herbeginnen we: links, rechts en middenin (dus terug naar links gaand):  
vierhonderd - zes - en - vijftig.  
En weer even de toestand verkennen: duizend.

En dan weer: links - rechts - naar links terug tot middenin:  
zevenhonderd - negen - en - tachtig.

Je merkt het: getallen lezen in het tientallig stelsel vergt heel wat oogbewegingen en een beweeglijk denken. Onze uitspraak van de getallen sluit niet zo best aan bij de tientallige schrijfwijze. En toch: van oudsher is de schrijfwijze zo.

Dat het voor ons wat moeilijk en onlogisch is, ligt aan het Nederlands. In andere talen ligt dat wat eenvoudiger. De Fransen hebben de goede gewoonte om de getallen systematisch van links naar rechts te lezen. Wat een voordeel voor de Franstalige leerlingen. Die Franse manier om getallen te lezen schijnt dus goed aan te sluiten bij het tientallig stelsel, terwijl ze toch ook restanten uit het twaalfallig stelsel behouden hebben in het spreken. Maar daarover straks meer.

De Engelsen, met hun tradities en twaalfallig stelsel-relicten zijn echter nog consequenter dan de Fransen wat het lezen van de getallen betreft. Je kan er dus geen lijn in trekken.

Laat ik maar terugkeren naar het twaalfallige stelsel. Tot op de dag van vandaag lopen er mensen rond die bijzonder vaardig zijn in het hoofdrekenen. Maar het zijn grote uitzonderingen. Zeker sinds de uitvinding van de rekenmachine. Zeker sinds de elektronische handrekentoeestelletjes ook in elke kinderhand passen, en goedkoop genoeg zijn om binnen ieders bereik te brengen. Ze rekenen bovendien hopeloos juist. Maar vóór de tijd van deze wondermachines was hoofdrekenen een belangrijk onderdeel van het leren rekenen. En ieder die op de één of andere manier met handel of getallen te maken had, maakte er een erezaak van dit vlot te kunnen.

Wat blijkt? Het twaalfallig stelsel biedt de hoofdrekelaar enorm veel mogelijkheden. En dat dankzij de goede deelbaarheid van 12. Vergelijk dat even met 10:

delers van 12: 2 - 3 - 4 - 6  
delers van 10: 2 - 5

De veelvoudigen van 12 bieden derhalve ook meer mogelijkheden dan die van 10. Het is pas bij het getal 60 dat tientallig en twaalfallig stelsel elkaar ontmoeten. 60 is dan ook een heel 'rijk' getal. Het speelde in het twaalfallig stelsel een belangrijke rol. In het tientallig stelsel is 60 echter maar een onderdeel van de rij, zonder noemenswaardig belang. Maar als raakpunt van de twee systemen heeft het eeuwenlang een grote waarde gehad.

Wanneer we het over kwaliteiten van getallen hebben zullen we sneller bij het twaalfallig stelsel uitkomen. Omdat daar bepaalde getallen een diepe betekenis hebben, zelfs om gewoon rekenkundige principes. Terwijl deze in het tientallig stelsel onbelangrijk zijn geworden. Alles is er ondergeschikt gemaakt aan de plaats van het cijfer. In het 12-tallig stelsel gaat het veel meer om getallen, minder om cijfers.

Dat heeft ook zijn sporen nagelaten in de taal. Al verdwijnt deze kennis nu ook snel. Een dozijn: dat kennen we nog. Maar een gros is voor vele mensen een vreemd woord. Het duidt het getal 144 aan: twaalf maal een dozijn. Vandaar ook het woord grossier of grossist: iemand die per 144 stuks verkoopt. De Romeinen verdeelden hun gewichtseenheid in 12 delen. Zo een deel noemden zij 'uncia'. Het woord is in onze taal nog te vinden als 'ons'. Al gebeurt het

wel dat een Nederlander dit woord best niet gebruikt in Vlaanderen. Want daar is het al tot het voltooid verleden gaan behoren. Ons telsysteem verwijst ook nog naar het twaalfstal: tot 12 hebben we voor elk getal een eigen woord. Vanaf 13 wordt het tiental vernoemd. In het Frans (in Frankrijk) telt men tot 60: soixante. Vandaanaf herbegint de telling: soixante et un, soixante-deux, enz. Zeventig bestaat niet, maar heet soixante-dix. Deze benamingen verwijzen tegelijk naar de twee systemen. 60 als kwaliteit in het twaalfstallig stelsel. 60 als veelvoud van 10 in het tientallig stelsel.

12 heeft ook een meer cultuurhistorische achtergrond. Van in de oudste tijden komt dit getal als een belangrijk gegeven naar voor. In de Chaldeeuwse tijden werd het jaar in 12 gedeeld. Dit hing samen met de 12 sterrenbeelden die de zon moest doorlopen, vóór ze weer in het lentepunt kwam. De 12 maanden van ons jaar komen eruit voort. De dag werd door de Sumeriërs in 12 gelijke delen verdeeld. (Elk deel duurt in onze telling 2 uren). Later werd de dag in 24 uren opgedeeld: het twaalfstal werd erin behouden. En dan weet je het wel: dan komt het getal 60 weer tevoorschijn: 60 minuten in een uur, 60 seconden in een minuut. Maar een uur werd ook in 12 gedeeld: op elk twaalfde deel staan de cijfers van de klok. Elk twaalfde deel is 5 minuten waard. De 60 werd ook door vier gedeeld: dat werden de kwartieren.

De helft van 60 is 30: een halfuur natuurlijk. Maar ook het getal dat terugkeert in het aantal dagen van de maanden. Al is dat erg onvolkomen, om de maan- aan de zonnecalender aan te passen. Het jaar wordt ook in 4 gedeeld. De vier seizoenen. Elk seizoen heeft 3 maanden. Een trimester is een vierde deel van het jaar: drie maanden. Een kwartaal is dat ook. Het zijn namen die verband houden met de goede deelbaarheid van 12.

Ook heel verwant met de kosmos is de muziek. De tonen en vooral de intervallen worden dikwijls beschouwd als bijzonder verbonden met de planetenwerelden. Het uitgangspunt bij de leer van de intervallen is het oktaaf: de grondtoon wordt daarbij in een hoger of lager stadium herhaald. Hetzelfde karakter van de grondtoon treedt naar voor, maar in een andere dimensie. Nu wordt het oktaaf in zeven verdeeld (vergelijk met de zeven van oudsher bekende planeten):

prime  
sekunde  
terts  
kwart  
kwint  
sext  
septiem

Elk van deze intervallen staat in een bijzondere verhouding tot het oktaaf. Maar als we het oktaaf in steeds gelijke delen verdelen, met intervallen van een halve toon, dan kan je het in 12 gelijke delen verdelen. Van nature zijn die twaalf delen weliswaar niet allemaal gelijk, maar sinds de invoering van de 'getemperde' stemming zijn ze dat wel. Deze 12 intervallen van het oktaaf liggen aan de basis van het twaalftonenstelsel of dodekafonie.

Dankzij de muziek zien we ook de nauwe verwantschap tussen de 7 en de 12. En kunnen we overstappen naar de 7, en verwijzen naar de zeven dagen van de week, de zeven kleuren van de regenboog, enz. En tegelijk zijn we weer heel sterk bezig met de kwaliteit van de getallen.

Misschien wat ver gezocht?

Heel wat wiskundigen breken er zich het hoofd niet over, en zoeken het minder ver. Zij beweren dat het twaalfstallig stelsel louter en alleen te maken heeft met de handel. Waar het als een belangrijk voordeel gold dat 12 als eenheid meer delers had dan 10. Daardoor was het gemakkelijker om met breuken te werken. Als je een derde moet nemen van 12, dan is dat perfect in orde. Maar een derde van 10 krijg je niet voor mekaar. Zelfs iets eenvoudigs en veel

voorkomends als een vierde is bij het tiental een probleem: het geeft twee en een half als resultaat. Bij de twaalf kan je je echter weeral verheugen in een goed uitkomende breuk.

Bij al dat gereken boden de belangrijke getallen in het 12- tallig stelsel door hun eigen benaming goede steunpunten. Wanneer je met minuten rekest, reken je tot je een uur hebt, daarna kan je verder met uren. Hetzelfde doet zich voor in andere meeteenheden: 12 inches zijn een voet. Dus kan je vanaf 12 inches verder rekenen met voeten. Voor het berekenen van geldsommen is dat ook heel bruikbaar. Zulke steunpunten heb je in het tientallig stelsel niet.

Het 10-tallig stelsel heeft andere voordelen. We hebben namelijk 10 vingers. En dat zijn nog steeds de beste instrumenten om mee te rekenen. Je kan ermee tot 10 tellen, en herbeginnend steeds verder gaan, met veelvoud van 10. Dat de taal daarbij aansluit hoef ik niet verder uit te leggen: het klinkt voor zich. Nu mag ik me hiertoe niet beperken. Het 10-tallig stelsel zal wel te maken hebben met het feit dat we tien vingers (en tenen) hebben. Maar dit stelsel heeft ook zijn cultuurhistorische inhoud. De Romeinen gaven hun getallen letters en steunden daarbij op het tiental, of een verdeling ervan in de helft.

Ter herinnering:

$$\begin{array}{lll} V = 5 & L = 50 & D = 500 \\ X = 10 & C = 100 & M = 1000 \end{array}$$

De Romeinen waren daarin volgelingen van de Egyptenaren, die zelf voor elke macht van 10 een apart teken gebruikten. (je vindt meer hierover in de geschiedenisperiode van de vijfde klas)

Eeuwenlang werd bij het schrijven gewerkt met het tientallig systeem. Voor het hoofdrekenen werd echter steeds het twaalfallig stelsel gehanteerd. Waarbij het getal 60 dikwijls als draaischijf tussen beide systemen gebruikt werd.

In 1791 besliste de Parijse Academie van Wetenschappen dat alle maten, gewichten enz. tot het tientallig stelsel moesten behoren. En daar werd dit stelsel dan tot alleenzaligmakend uitgeroepen. De aarde, van pool tot pool, werd opgedeeld in 40.000.000 gelijke delen. Zo één deel werd meter genoemd. En als definitieve maateenheid in goud gegoten. Afgekeken werd er dan van het twaalfallig stelsel: belangrijke veelvoud van machten kregen een eigen benaming. Kilo- voor het duizendvoud, milli- voor een duizendste deel. Het voordeel van het systeem was dat alle andere maten - inhouden, gewichten, enz. - hierop konden gebaseerd worden. En ook dat is wel een ontdekking waard in een vierde, vijfde of zesde klas: dat een liter verwantschap heeft met de omtrek van de aarde. De kinderen zouden het zelf niet kunnen bedenken. Het is een kwaliteit van het tientallig stelsel.

Deze eigenschap, en het feit dat het tientallig stelsel in zijn schrijfwijze zo duidelijk is maakte dat het de bovenhand kreeg. Het visuele en het schriftelijke won het op het hoofdrekenen. Heel onze beschaving is er mee vergroeid. We zullen er dan ook 'rekening' moeten mee houden.

Maar wat we in de Steinerschool doen is: de kwaliteiten trachten weer te vinden. Zo dus ook wat de kwaliteit van het 12-tallig stelsel betreft. Bij al het rekenen dat we in de ritmische oefeningen doen laten we graag het kosmisch-verbonden-zijn van de 12 primeren. Maar tegelijk houden we zo het hoofdrekenen in ere: de kinderen worden niet vastgepind op het tiendelige, papiergebondene cijferrekenen. Maar het rekenen blijft beweeglijk. Alle problemen die in andere scholen al oefenend moeten weggewerkt worden wanneer kinderen moeten leren rekenen over het tiental heen, komen wij niet tegen.

Maar we mogen ook niet overdrijven: wanneer het cijferrekenen aan bod komt moeten we, ook in de Steinerschool, tot het tientallige stelsel afdalen. En dan moeten we ook beseffen dat het niet nodig is een grondige kennis van de tafels van vermenigvuldiging en deling te blijven eisen tot 12. Bij het staartdelen in de vierde klas bv. mogen de kinderen gerust beseffen dat ze

aan een getallenrij tot 10 meer dan genoeg hebben. (Bij het staartdelen moeten de tafels maar tot 9 gekend zijn).

We moeten de voordelen van het 10-talig stelsel niet verwerpen. We moeten ze alleen in een ruimer kader plaatsen. Dat kader kan dus ook uitgebreid worden. Met bv. het tweetalig stelsel, waarin de cijfers 0 en 1 een rol spelen. Vanaf de vijfde klas een boeiend gegeven, dat ook in een cultuurhistorisch kader past, dat juist in die klas aan bod komt. De vijfde klas begeeft zich in de Egyptische cultuur. En in die lang vervlogen tijden kenden de mensen geen vermenigvuldiging en deling zoals wij dat nu kennen. Zij hadden er wel wat opgevonden: door steeds te verdubbelen, of te halveren, konden zij alle oplossingen vinden. Deze manier van werken (verdubbelen is namelijk werken met machten van twee), vinden we terug in het tweetalig stelsel dat aan de basis ligt van de moderne informatica-cultuur. En dichterbij vinden we het tweetalig stelsel ook heel spontaan bij jonge kinderen. Er zijn heel wat kinderen die het heel boeiend vinden om steeds al verdubbeld verder te tellen. 2 plus 2 is vier. 4 plus 4 is 8. 8 plus 8 is 16. enz. De binaire getallenwereld in al zijn oorspronkelijkheid. En het boeiende, oude verhaal van de Indische koning Sheran, die de uitvinder van het schaakbord wilde belonen. Ook hier, in weer een andere context de binaire ruimte.

Het waren wat losse gedachten over 10, 12 en 2. En wat die in onze beschaving teweeggebracht hebben. Ik hoop dat je hiermee enig vermoeden krijgt waarom deze drie getalsystemen in de Steinerschool gebruikt worden. Ik hoop ook dat je hierdoor beseft dat rekenen niet een saaie bedoening hoeft te zijn. Het is een vak dat een enorm rijke geschiedenis bevat. Het is een vak dat de kinderen aanzet tot ontdekken. Het is een vak dat het denken tot beweeglijkheid aanzet. Steeds opnieuw.

De 12, en de getallen die hiervan de delers zijn, vind je sterk vertegenwoordigd in de minerale wereld, in de kristallen. 10 en 12 (hun delers 5 en 6) vind je als tegenpolen in de plantenwereld. De 2 brengt de dieren- en mensenwereld in vervoering: de symmetrie vinden we in haast alles, terwijl de 5 (en de 10) er de uitzondering is. En iets meer geestelijk vinden we het harmonisch samengaan van de drie getallenstelsels:

2: de symmetrie in het menselijke lichaam, en de symmetrie waarnaar de mens voortdurend neigt en verlangt. Het evenwicht.

10: De mens als tiende geestelijke hiërarchie.

12: De mens als incarnerend wezen op aarde. De vier temperamenten. De drie zielekrachten.

Je ziet: de Steinerschool is niet zo kortzichtig dat ze alleen aandacht heeft voor het onmiddellijk bruikbare. Ze betreft de hele menselijke cultuur in zelfs zoiets eenvoudigs als het leren tellen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. In volgend hoofdstuk weer meer aandacht voor de ritmische oefeningen en hoe ze samengaan met het leren lezen.