

VAN HOOFDREKENEN NAAR CIJFERREKENEN (CIJFEREN)

Luc Cielen

In het 3e trimester van de 2e klas (eerder kan ook) kun je overgaan van het hoofdrekenen naar het cijferen.

Je vertrekt van de schriftelijke opgaven voor hoofdrekenen zoals de kinderen dat gewoon zijn in eerste en tweede klas en laat die dan op een andere manier schrijven. Wat eerst horizontaal genoteerd werd, zet je nu om in een verticale opbouw: de verschillende termen van de opgave komen onder elkaar.

De bewerkingstekens blijven hetzelfde, behalve voor het delen. Voor de deling gebruik je nu een schuine (later rechte) streep. Het symbool voor 'gelijk aan' teken je eerst met twee horizontale strepen, later met één streep.

$5 + 3 = 8$	$7 - 3 = 4$	$2 \times 3 = 6$	$8 : 4 = 2$
schrijf je nu	schrijf je nu	schrijf je nu	schrijf je nu
$\begin{array}{r} 5 \\ + 3 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ - 3 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \end{array}$

DE VIER HOOFDBEWERKINGEN.

Je geeft eerst enkele oefeningen waarbij het tiental niet overschreden wordt, zoals in het voorbeeld hierboven. Daarvan geef je slechts enkele oefeningen omdat die zéér gemakkelijk zijn en geen probleem opleveren. Daarna geef je oefeningen waarbij het tiental wel overschreden wordt, maar het blijven oefeningen over het hoofdrekenen: de kinderen rekenen de som uit het hoofd uit en noteren de oefening op de nieuwe manier.

Het belangrijkste hierbij is dat de kinderen de cijfers mooi recht onder elkaar leren zetten. Een blad met ruitjes (bij voorkeur commercieel) helpt om dit te bereiken en je adviseert om slechts één cijfer per ruitje te schrijven.

7	12	3	18	<u>3</u>
+ 6	- 4	× 4		6
<u>13</u>	<u>8</u>	<u>12</u>		

HET TIENTALLIG STELSEL

In het 3e trimester van de 2e klas of in het 1e trimester van de 3e klas begin je met het tientallig stelsel. Om dit duidelijk te maken kun je beginnen met een ABACUS te maken, bijvoorbeeld in klei.

ABACUS

Je neemt een dik plak boetseerleij.

Je geeft die een rechthoekige vorm.

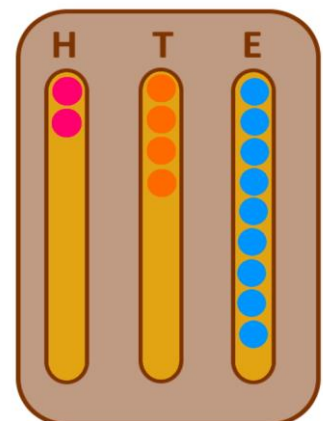
Je drukt er drie gleuven in, net zo breed als een knikker.

In de lengte van elke gleuf moeten 10 knikkers passen.

Bovenaan de meest rechtse gleuf druk je de letter E (van EEN) in de klei.

Bovenaan de middelste sleuf druk je de letter T (van TIEN) in de klei.

Bovenaan de linkse sleuf druk je de letter H (van HONDERD) in de klei.



Abacus met het getal 249.

Als je 10 knikkers in de rechtse gleuf (E) legt, mag je die omwisselen voor 1 knikker die je in de gleuf T legt. Die ene knikker in de T-gleuf is dus evenveel waard als 10 knikkers in gleuf E.

10 knikkers in gleuf T mag je omwisselen voor 1 knikker in gleuf H: daar is een knikker evenveel waard als 10 knikkers in T en evenveel als 100 knikkers in E.

Je kunt het onderscheid tussen de verschillende gleuven benadrukken door verschillende dikten van knikkers te nemen.

Voor de eenheden (E): kleine knikkers (∅ 12 mm).

Voor de tientallen (T): dikke knikkers (∅ 14 mm).

Voor de honderdtallen (H): heel dikke knikkers (∅ 16 mm).

Het voordeel van verschillende dikten is dat de dikkere knikkers niet in de gleuven van de dunnere knikkers passen, zodat vergissing uitgesloten is.

Je kunt ook knikkers in drie verschillende kleuren nemen.

OEFENEN MET DE ABACUS

1 kind speelt bank (zoals bij Monopoly), een ander kind legt de knikkers op de abacus.

*Regel: je begint altijd knikkers te leggen in gleuf E. Als die gleuf vol is, mag je omwisselen bij de bank en ga je voort in gleuf T. Je werkt dus van **rechts naar links**.*

Voorbeelden:

- Leg 8 knikkers op de abacus.
Je legt de 8 knikkers in gleuf E. Je hebt 8 eenheden.
- Leg 10 knikkers op de abacus.
Je legt 10 knikkers in gleuf E. Nu mag je omwisselen: je neemt de 10 knikkers eruit en wisselt die bij de bank om voor 1 knikker die je in gleuf T legt.
Hoeveel knikkers liggen er in gleuf T? 1. Hoeveel knikkers is die waard? 10. Hoeveel tientallen zijn dit? 1.
Hoeveel knikkers liggen er in gleuf E? 0. Hoeveel eenheden zijn dit? 0.
Schrijf het getal op (op een oefenblaadje): 10 en benoem de cijfers: 1 tiental, 0 eenheden.
- Leg 15 knikkers op de abacus.
Je legt 10 knikkers in gleuf E. Die wissel je om voor 1 knikker die je in gleuf T legt.
Nu leg je de overblijvende 5 knikkers in gleuf E.
Hoeveel knikkers in gleuf E? 5. Hoeveel eenheden zijn dit? 5.
Hoeveel knikkers in gleuf T? 1. Hoeveel knikkers zijn die waard? 10. Hoeveel tientallen zijn dit? 1.
Schrijf het getal op: 15 en benoem de cijfers: 1 tiental, 5 eenheden.
OPMERKING: Waarom niet met 11 of 12 knikkers? Omdat in de woorden elf en twaalf het woord tien niet voorkomt. In de woorden dertien en veertien zit het woord tien wel, maar de cijfers drie en vier hebben er een andere klank.

Zo geef je gedurende enkele dagen enkele oefeningen, ook met getallen tussen 20 en 30. Dit volstaat om inzicht te krijgen in de plaats van de cijfers en de waarde ervan. Je werkt steeds van rechts naar links, maar bij het noteren van het getal schrijf je het getal van links naar rechts.

Heb je een viertal oefeningen gemaakt op de manier zoals in de voorbeelden hierboven is aangegeven, dan geef je enkele oefeningen waarbij je een getal zegt en de kinderen dit getal met knikkers laat leggen op de abacus en het getal vervolgens opschrijven.

Voorbeelden:

- Leg (het getal) 32.
De kinderen leggen 2 in gleuf E en 3 in gleuf T.
Hoeveel zijn de 2 knikkers waard in gleuf E? 2.
Hoeveel zijn de 3 knikkers waard in gleuf T? 30.
Je schrijft het getal 32 op van links naar rechts.

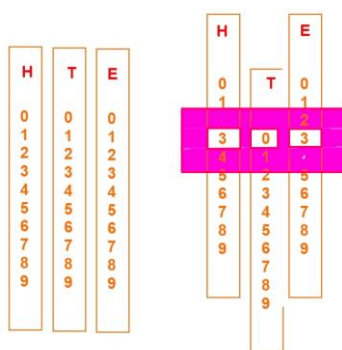
2. Leg (het getal) **64**.
De kinderen leggen **4** in gleuf E en **6** in gleuf T.
Hoeveel zijn de 4 knikkers waard in gleuf E? 4.
Hoeveel zijn de 6 knikkers waard in gleuf T? 60.
Je schrijft het getal 64 op van links naar rechts.
3. Leg (het getal) **40**.
De kinderen leggen **0** in gleuf E en **4** in gleuf T.
Hoeveel knikkers bij de eenheden? 0.
Hoeveel knikkers bij de tientallen? 4. De waarde is? 40.
4. Leg (het getal) **200**.
De kinderen leggen **0** in gleuf E, **0** in gleuf T en **2** in gleuf H.
Hoeveel knikkers bij de eenheden? 0
Hoeveel knikkers bij de tientallen? 0
Hoeveel knikkers bij de honderdtallen? 2

Bij opgaven 3 en 4 en in het voorbeeld hieronder, zullen de kinderen geneigd zijn om van links naar rechts te werken. Dit mogen ze zo doen. Als opgaven 3 en 4 goed gaan kun je oefeningen geven met 0 in de tientallen.

Voorbeeld:

- Leg het getal **105**.
Hoeveel knikkers in gleuf E? **5**.
Hoeveel knikkers in gleuf T? **0**.
Hoeveel knikkers in gleuf H? **1**.
Hoeveel is de waarde van de 5 knikkers in E? 5.
Hoeveel is de waarde van de 0 knikkers in T? 0.
Hoeveel is die ene knikker in H waard? 100.

Opgaven zoals in het voorbeeld hierboven kun je ook visualiseren met een abacus in karton met verschuifbare stroken voor eenheden, tientallen en honderdtallen. Het gevraagde getal verschijnt dan in een venster. De kinderen kunnen deze abacus zelf maken en er gedurende enkele dagen mee oefenen.



Abacus met verschuifbare stroken.

Optellingen oefenen op de abacus in klei.

Voorbeeld:

1. Leg het getal 8.
Voeg 2 knikkers toe (plus 2).
Gleuf E ligt nu vol knikkers, dus mag je gaan omwisselen bij de bank.
Je krijgt 1 knikker met waarde 10.
Die leg je in gleuf T.
Hoeveel knikkers in T? 1

Hoeveel knikkers in E? 0.
Hoeveel waarde hebben de knikkers in totaal? 10.

2. Leg het getal 8.
Doe er 3 bij (plus 3).
De oplossing (hoofdrekenen) is 11. Maar er gaan geen 11 knikkers in gleuf E. Dus van de 11 knikkers moeten er 10 omgewisseld worden voor 1 knikker met waarde 10. Die leg je in gleuf T.
Nu ligt er 1 knikker in T en 1 knikker in E. Het getal is 11.
Omdat de uitkomst via hoofdrekenen gekend is, zullen de kinderen het omwisselen van 10 eenheden in 1 tiental overslaan en onmiddellijk 1 knikker in T en 1 knikker in E leggen. Als ze beseffen dat die ene knikker in T de waarde 10 heeft, is dit oké.
3. Zo maak je nog enkele oefeningen met overschrijding van het tiental, waarbij steeds 10 knikkers omgewisseld worden voor 1 knikker in T, maar de kinderen mogen de uitkomst ook onmiddellijk leggen en het omwisselen overslaan. Zolang ze beseffen dat de ene knikker in T de waarde 10 heeft, is er geen probleem.

Deze optellingen oefenen op de abacus is wat omslachtig, maar heeft het voordeel dat het omwisselen van 10 eenheden in 1 tiental zichtbaar gemaakt wordt.

Je kunt ook aftrekkingen oefenen op de abacus, maar ze zijn nog omslachtiger dan de optellingen, omdat je tientallen moet omwisselen in eenheden die dan weer niet in de gleuf van de eenheden passen.

Het omwisselen van eenheden in tientallen en van tientallen in eenheden is een goede voorbereiding op het cijferen met overbrugging van het tiental. Dit geldt vooral voor de aftrekking.

Je kunt ook vermenigvuldigingen maken door knikkers op de abacus te leggen, maar het komt op hetzelfde neer als het maken van optellingen. 3×4 betekent op de abacus $4 + 4 + 4$ knikkers leggen.

Bij het maken van delingen met knikkers op de abacus bots je op hetzelfde probleem als bij de aftrekkingen.

DE GETALLENRIJEN (TAFELS) VAN 1, 10 en 100.

Na de oefeningen met de abacus kun je de getallenrijen van 1, 10 en 100 in kolomvorm laten noteren. Je gaat daarbij tot $10 \times$. Je kunt op ruitjespapier werken en daarbij de afspraak maken: slechts 1 cijfer per ruitje. Commercieel geruit papier is hiervoor zeer geschikt (rechthoekige ruitjes van 4×8 mm). De cijfers moeten recht onder elkaar staan.

DE EENHEDEN

Je begint met de getallenrij van 1 tot het getal 10.

Het getal 10 past niet in 1 ruitje, de 1 komt in het vakje links van de 0.

De cijfers in de kolom horen allemaal bij de tafel van 1. Dit noem je dan ook de kolom van één en je zet er een hoofdletter E boven. Al de cijfers in deze kolom horen dus bij de eenheid, het zijn eenheden.

De 1 van het getal 10 echter past niet in die kolom, en hoort dus niet bij de eenheden.

E
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

DE TIENTALLEN

Je laat de getallenrij van 10 noteren. Daarvoor heb je twee kolommen naast elkaar nodig.

Hoe heten de cijfers (allemaal nullen) in de rechtse kolom? Eenheden. De 0 van de 10 in de vorige getallenrij stond ook in de kolom van de eenheden.

De 1 van de 10 staat in de linkse kolom. Die 1 is 10 waard en heet tiental. Dus schrijf je boven deze kolom de hoofdletter T. Al de cijfers in deze kolom zijn veelvouden van 10: het zijn tientallen.

De 1 van het getal 100 staat links van de andere kolommen.

T	E
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	

DE HONDERDTALLEN

Je laat de getallenrij van 100 noteren. Daarvoor heb je drie kolommen nodig.

Het cijfer 1 van het getal 100 is 100 waard, en al de veelvouden ervan in die kolom zijn veelvoud van 100. Deze kolom krijgt de naam van de honderdtallen en je zet er een hoofdletter H boven.

Het cijfer 1 van het getal 1000 staat links van de andere kolommen.

Je kunt dus nu al eens vragen hoe de kolom zal heten waarin dit cijfer zal komen.

H	T	E
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
1	0	0

OPTELLEN

OPTELLEN: EENHEDEN EN TIENTALLEN ZONDER OVERSCHRIJDING VAN HET TIENTAL.

Hoe ga je te werk als je getallen optelt waarin ook tientallen voorkomen?

Boven de sommen staan de letters T en E om de kolommen van de tientallen en de eenheden aan te duiden. Eerst optellingen waarbij de som van de eenheden het tiental niet overschrijdt en de som van de tientallen het honderdtal niet overschrijdt. Je laat de opgaven eerst oplossen met hoofdrekenen. Pas als de uitkomst bekend is, laat je ze opschrijven met schetspotlood zodat ze weer uitgegomd kan worden.

Na het opschrijven laat je zien dat je de uitkomst ook kunt vinden door eerst de eenheden op te tellen en daarna de tientallen.

De kinderen gommen nu de uitkomsten uit en rekenen de opgaven opnieuw uit door eenheden en tientallen afzonderlijk op te tellen.

T	E		T	E		T	E		T	E	
1	3		2	5		1	7		1	1	
+	1	2	+	1	2	+	2	1	+	3	8
<hr/>			<hr/>			<hr/>			<hr/>		
2	5		3	7		5	8		4	9	

OPTELLEN: EENHEDEN EN TIENTALLEN MET OVERSCHRIJDING VAN HET TIENTAL

De som van de eenheden is groter dan 10.

Boven de sommen staan weer T en E: de kolom van de tientallen en de kolom van de eenheden.

1e stap:

Je schrijft de uitkomst van de eenheden op. Het tiental zet je in de kolom van de tientallen. Daaronder schrijf je de uitkomst van de tientallen. Ten slotte tel je de twee uitkomsten (hieronder in het rood) op.

T	E		T	E		T	E		T	E	
1	3		2	5		3	7		4	6	
+	1	9	+	1	8	+	2	6	+	3	8
<hr/>			<hr/>			<hr/>			<hr/>		
	1	2		1	3		1	3		1	4
+	2		+	3		+	5		+	7	
<hr/>			<hr/>			<hr/>			<hr/>		
3	2		4	3		6	3		8	4	

Je hoeft je niet te beperken tot eenheden en tientallen, je kunt ook enkele oefeningen geven waarin honderdtallen voorkomen.

Oefeningen volgens deze methode laat je slechts gedurende één dag maken. De volgende dag zet je de 2e stap.

2e stap:

Van de uitkomst van de eenheden schrijf je alleen het cijfer van de eenheden op. Het cijfer van de tientallen schrijf je boven de kolom van de tientallen. Daarna tel je alles op.

OPMERKINGEN:

1. Met een optelling van 2 getallen komt de som van de eenheden nooit boven 18 uit. Het cijfer van het tiental dat je overhevelt naar de kolom van de tientallen is dan ook nooit meer dan 1.
2. De letters T en E boven de kolommen mogen nu verdwijnen. De kinderen zouden nu voldoende vertrouwd moeten zijn met de termen eenheden en tientallen en de plaats daarvan binnen getallen.

Na de optelling van de eenheden zien de sommen er zo uit:

¹ 13	¹ 25	¹ 37	¹ 46
+ 19	+ 18	+ 26	+ 38
<u><u>2</u></u>	<u><u>3</u></u>	<u><u>3</u></u>	<u><u>4</u></u>

Als ook de tientallen zijn opgeteld, is dit het resultaat:

¹ 13	¹ 25	¹ 37	¹ 46
+ 19	+ 18	+ 26	+ 38
<u><u>32</u></u>	<u><u>43</u></u>	<u><u>63</u></u>	<u><u>84</u></u>

- Dit is de werkwijze die in de 3e en 4e klas zal gebruikt worden. In de loop van de 5e klas kun je vragen om de kleine cijfers bovenaan weg te laten en in plaats daarvan de cijfers te onthouden. Als kinderen dit echter al te moeilijk vinden, mogen ze de cijfers bovenaan blijven zetten als geheugensteun.

- Na een aantal oefeningen met eenheden en tientallen, kun je ook enkele oefeningen geven waarin honderdtallen voorkomen en vanaf de 3e klas geleidelijk aan ook sommen met duizendtallen, tienduizendtallen enz.

- Oefeningen met meer dan 2 getallen om op te tellen kun je nu ook geven, zodat het te onthouden cijfer al eens meer dan 1 is.

- Het gelijkheidsteken vervang je nu door één lijn.

¹ 1.245.967	¹ 763	¹ ² 159
+ 2.684.088	+ 298	678
<u><u>3.930.055</u></u>	<u><u>1.061</u></u>	<u><u>+ 204</u></u>
		<u><u>1.041</u></u>

AFTREKKEN

AFTREKKEN ZONDER OMWISSELEN VAN TIENTALLEN IN EENHEDEN

De kinderen zoeken de uitkomst eerst met hoofdrekennen. Daarna met cijferen.

	T	E
		8
-		4
		4

	T	E
	1	6
-		5
	1	1

	T	E
	2	7
-	1	3
	1	4

	H	T	E
	3	4	5
-	1	3	4
	2	1	1

AFTREKKEN MET OMWISSELEN VAN TIENTALLEN IN EENHEDEN

Eerst met hoofdrekennen de uitkomst zoeken. Daarna cijferen, maar als blijkt dat een aftrekking bij de eenheden onmogelijk is omdat het aftrekgetal kleiner is dan de aftrekker, dan kun je bij de tientallen te rade gaan en **één tiental** omwisselen in **10 eenheden**.

Dit noteer je zo:

	T	E
	2	⁺¹⁰ 3
-	₋₁	4
	1	9

	T	E
	⁺¹⁰ 3	1
-	₋₁	3
	2	8

Omwisselen kan ook zo:

Eerst **één tiental** weghalen bij de tientallen en omwisselen in **10 eenheden**.

Daarna **één honderdtal** weghalen bij de honderdtallen en omwisselen in **10 tientallen**.

	H	T	E
	2	⁺¹⁰ 3	⁺¹⁰ 4
-	₋₁	₋₁	4
	1	8	8

Als de werkwijze met omwisselen goed gekend is, kun je laten zien dat het altijd om de getallen 1 en 10 gaat. Je hoeft die dus niet elke keer te schrijven, je kunt ze net zo goed vervangen door een puntje met de volgende afspraak:

Een punt onder een cijfer betekent: 1 eraf.

Een punt boven een cijfer betekent: 10 erbij.

	T	E
	2	[.] 3
-		4
	1	9

	H	T	E
	2	[.] 3	[.] 4
-		4	6
	1	8	8

Bij het maken van de aftrekking en het plaatsen van de twee puntjes zeggen de kinderen telkens: 1 eraf, 10 erbij. Ze zetten het puntje links (onder het cijfer) eerst, het puntje rechts (boven het cijfer) onmiddellijk daarna.

Als de werkwijze met de puntjes goed ingeburgerd is, kun je nog een stap verder gaan, al is die niet noodzakelijk. Het is meer een rekenvoordeel voor wie sneller wil rekenen.

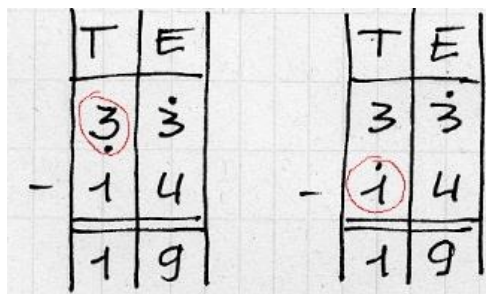
Het puntje onder het bovenste cijfer vervang je door een puntje boven het onderste cijfer. De waarde van het puntje blijft 1, maar je telt het nu op bij het onderste cijfer. Om dit duidelijk te maken, laat je een aantal aftrekkingen maken waarbij je de twee versies naast elkaar zet, zodat duidelijk zichtbaar is dat de uitkomsten hetzelfde zijn.

In de oefening links trek je 1 af van 3. In de oefening rechts tel je 1 op bij 1.

Links krijg je dus $(3 - 1) - 1 = 1$.

Rechts krijg je dus: $3 - (1 + 1) = 1$.

Bij het maken van de aftrekking en het plaatsen van de twee puntjes zeggen de kinderen nu telkens: 1 erbij, 10 erbij. Ook hier weer: eerst het linker puntje, dan het rechtse.



VERMENIGVULDIGEN: DE TRAPVERMENIGVULDIGING

De volledige uitleg met stappenplan vind je op:

<https://www.cielen.eu/wiskunde-3e-klas-cijferen-trapvermenigvuldiging-didactiek.pdf>

DELEN: DE STAARTDELING

Uitleg en stappenplan vind je op:

<https://www.cielen.eu/wiskunde-staartdeling-tafeldokter-didactiek-lc.pdf>

en

<https://www.cielen.eu/staartdeling-met-deler-van-2-cijfers-uitleg.pdf>

en

<https://www.cielen.eu/staartdeling-tot-op-1-decimaal-uitleg.pdf>

en

<https://www.cielen.eu/staartdeling-tot-op-2-decimalen.pdf>

en

<https://www.cielen.eu/staartdeling-tot-op-3-decimalen-uitleg.pdf>

De Nederlandse notatie van de staartdelingen vind je o.a. op de volgende site:

<https://www.sommenfabriek.nl/wiskunde/rekenen/hele-getallen/helegetallen-delen/5-staartdeling-zonder-rest/>